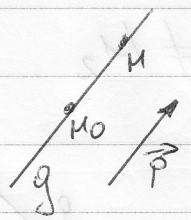
АГ 16 10 12 Иван Ко

Уравнение на права в равнината

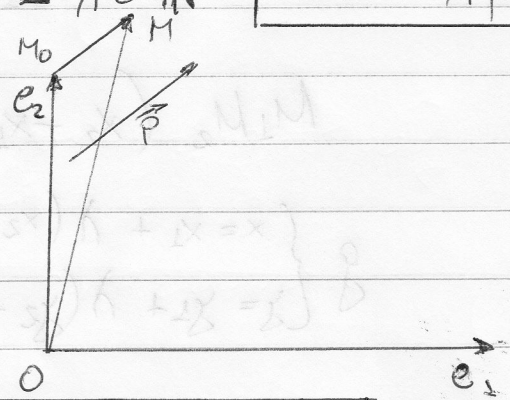


$q: \begin{cases} \ni, т.M_0 \\ \parallel \vec{p} \end{cases}$

$т.M \in q \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : \boxed{\overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{p}}$

$K = Oe_1e_2$

$т.M_0(x_0\ y_0)$; $т.M(x,y)$; $\vec{p}(a\ b)$



$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{p}$ може да бъде записано координатно $\rightarrow \boxed{\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0)}$

$q: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases} \lambda \in (-\infty; \infty)$

скаларни параметрични уравнения на q

M - текуща точка

$\vec{p}$ - направляващ вектор

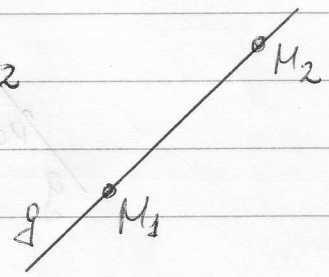
$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{OM} = \vec{r} \\ \overrightarrow{OM_0} = \vec{r_0} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0O} + \overrightarrow{OM} = \vec{r} - \vec{r_0} \Rightarrow$

от $\overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{p} \Rightarrow \boxed{q: \vec{r} = \vec{r_0} + \lambda \vec{p}}$ наричаме

векторно параметрично уравнение на правата q

$\vec{r}$ – текущ радиус вектор на точката M

Нека $M_1(x_1 y_1)$
$M_2(x_2 y_2)$ $\quad M_1 \neq M_2$



Тогава $M_1M_2 : \left\{ \begin{matrix} \ni T.M_2 \\ \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \end{matrix} \right\}$

$M_1M_2 (x_2 - x_1 ; y_2 - y_1)$

$g \begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{cases}$ при $\lambda \in (-\infty ; \infty)$ $\Big| \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \lambda}$$

По общо, ако $g : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}$ то имаме $g : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$

Общо уравнение на права в равнината

Т

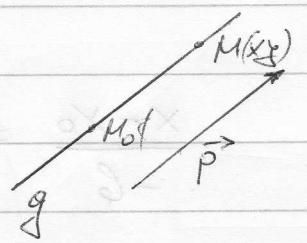
Ако точката $M(x y) \in g$, то $(x y)$ удовлетворява уравнение от вида

$$ax + by + c = 0$$

където $a^2 + b^2 > 0$

Всяко уравнение от вида $ax+by+c=0$ при условие $a^2+b^2>0$ е уравнение на единствена права в равнината

Доказателство ($\rightarrow$)



Нека $q: \begin{cases} \text{т. } M_0(x_0,y_0) \\ \parallel \vec{p}\,(p_1,p_2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \text{т } M(x,y) \in q \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{p_1} = \frac{y-y_0}{p_2} \Rightarrow$$

$$p_2(x-x_0) - p_1(y-y_0) = 0 \quad \text{или}$$

$$p_2x - p_1y - p_2x_0 + p_1y_0 = 0$$

дефинираме (именуваме)

$$a = p_2 \; ; \; b = -p_1 \; ; \; c = -p_2x_0 + p_1y_0 \Rightarrow$$

след заместване уравнението има вида

$$ax + by + c = 0$$

$(a,b) \neq (0,0)$, защото $\vec{p} \neq \vec{0}$

Доказателство ($\leftarrow$)

Нека е дадено уравнението $ax+by+c=0$ при условие $a^2+b^2>0$ и (x_0,y_0) е решение

т. $M_0(x_0 y_0)$. Нека $\vec{p}(-b, a) \neq \vec{0}$
разглеждаме правата $h \left\{ \begin{matrix} \ni \text{т.} M_0 \\ \parallel \vec{p} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$$h: \begin{cases} x = x_0 + \lambda(-b) \\ y = y_0 + \lambda a \end{cases} \qquad \lambda \in (-\infty; \infty) \Rightarrow$$

$$\frac{x - x_0}{-b} = \frac{y - y_0}{a} \Rightarrow a(x - x_0) = -b(y - y_0) \text{ или}$$

$$ax - by - \underbrace{ax_0 - by_0}_{c} = 0$$

но $(x_0 y_0)$ е решение на $ax + by + c = 0 \Rightarrow$

$$ax_0 + by_0 + c = 0 \Rightarrow \exists! h$$

уравнението $ax + by + c = 0$ се нарича общо уравнение на правата g

Забележка

Ако g е с уравнение $ax + by + c = 0$ то $\vec{p}(-b, a) \parallel g$

Ако k е ОКС (ортонормирана) то $\vec{q}(a b) \perp \vec{p}$
$(\vec{p}\vec{q}) = 0 \Rightarrow \vec{q}(a b) \perp g$

Твърдение

$\vec{p}(\lambda, \mu) \parallel g : ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \lambda a + \mu b = 0$

Доказателство

$$\vec{p}\,(\lambda\mu) \parallel g \iff \vec{p} \parallel \vec{g}\,(-b, a) \iff$$

$$\exists \rho \neq 0 : \lambda = -\rho b \text{ и } \mu = \rho a \iff$$

$$\lambda a + \mu b = -\rho ab + \rho ab = 0$$

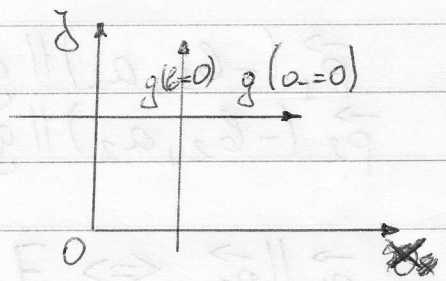
Твърдение

Нека $g: ax + by + c = 0$. Тогава

а) $g \parallel Ox \iff a = 0$

б) $g \parallel Oy \iff b = 0$

в) $g \ni т.O \iff c = 0$



Доказателство

а) $g \parallel Ox \iff g \parallel \vec{e_1}\,(1,0) \Rightarrow a.1 + b.0 = 0 \Rightarrow a = 0$

б) $g \parallel Oy \iff g \parallel \vec{e_2}\,(0,1) \Rightarrow a.0 + b.1 = 0 \Rightarrow b = 0$

в) $g \ni т.O\,(0,0) \iff a.0 + b.0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

Взаимно положение на две прави в равнината

АКС $\quad k = O\vec{e_1}\vec{e_2}$

Нека $g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

7

а) Правите g_1 и g_2 се пресичат $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

б) Правите g_1 и g_2 са успоредни $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

в) Правите g_1 и g_2 съвпадат $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Доказателство а)

$\vec{p}_1(-b_1, a_1) \parallel g_1$
$\vec{p}_2(-b_2, a_2) \parallel g_2$

$\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \Leftrightarrow \exists\, p \neq 0 : \left\{ \begin{matrix} -b_1 = -p a_2 \\ a_1 = p b_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} \left(= p\right) \Rightarrow$

$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2 \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_1}{a_2}$

Док б) – доказва се по противоположен начин

Доказателство в)

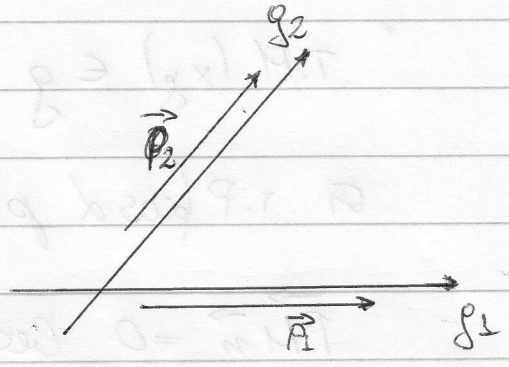
Нека $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow g_1 \parallel g_2 \Rightarrow g_1 : (pa_2)x + (pb_2)y + c_1 = 0$

$\Rightarrow \left. \begin{matrix} p(\underbrace{a_2 x + b_2 y}_{c_2}) + c_1 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow c_1 = p c_2 \Rightarrow$

$g_1 \equiv g_2$ и $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Ако $g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$



$\vec{p_1}(-b_1; a_1) \parallel g_1$

$\vec{p_2}(-b_2; a_2) \parallel g_2$

$$\measuredangle(g_1 g_2) = \measuredangle(\vec{p_1}\,\vec{p_2})$$

$$\cos\measuredangle(\vec{p_1}\,\vec{p_2}) = \frac{\vec{p_1}\,\vec{p_2}}{|\vec{p_1}||\vec{p_2}|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

Нормално уравнение на права в равнината

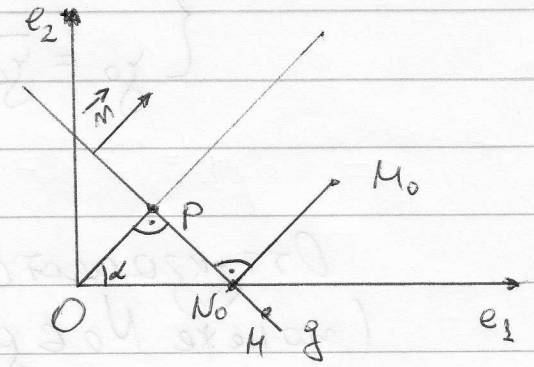
Разстояние на точка до права

Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ - ОКС в равнината

$$g : ax + by + c = 0, \quad c \neq 0 \ (g \not\ni \text{т.} O)$$

т. $P \in g$, $OP \perp g$

$$\vec{n} = \frac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|} = \frac{1}{|\vec{OP}|}\,|\vec{OP}| = 1$$



$\measuredangle(\vec{e_1}, n) = \alpha \Rightarrow \vec{n}(\cos\alpha \sin\alpha)$

Нека $|\vec{OP}| = p \Rightarrow \vec{OP}(p\cos\alpha\ p\sin\alpha)$

т. $M(x,y) \in g \iff \overrightarrow{PM} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{PM}\vec{n} = 0$

от т. $P(p\cos\alpha\ p\sin\alpha) \Rightarrow \overrightarrow{PM}(x - p\cos\alpha\ y - p\sin\alpha) \Rightarrow$

$\overrightarrow{PM}\vec{n} = 0$ векторно уравнение на правата (ОКС)

$$(x - p\cos\alpha)\sin\alpha + (y - p\sin\alpha)\sin\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$g: x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

(нормално уравнение на $g, \vec{n}$)

Ако имаме $M_0(x_0, y_0)$, нека $N_0(\bar{x_0}, \bar{y_0})$ - ортогонална проекция на M_0 върху g

$$\boxed{\overrightarrow{N_0M_0} = \delta\vec{n}}$$

δ - ориентирано разстояние от M_0 до g

$\overrightarrow{N_0M_0} = (x_0 - \bar{x_0}, y_0 - \bar{y_0})$ и тогава от $\overrightarrow{N_0M_0} = \delta\vec{n}$ получаваме векторно уравнение

$$\begin{cases} x_0 = \bar{x_0} + \delta\cos\alpha \\ y_0 = \bar{y_0} + \delta\sin\alpha \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} \bar{x_0} &= x_0 - \delta\cos\alpha \\ \bar{y_0} &= y_0 - \delta\sin\alpha \end{aligned}$$

Отчуждаваме в $g: x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ (понеже $N_0 \in g$) и получаваме

$$(x_0 - \delta\cos\alpha)\cos\alpha + (y_0 - \delta\sin\alpha)\sin\alpha - p = 0 \Rightarrow$$

$$\delta^g_{M_0} = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p = 0$$

$|\delta_{M_0}^{g}|$ - абсолютно разстояние

$g: (-\cos\alpha)x + (-\sin\alpha)y + p = 0$

Нормално уравнение на правата g съответства-
що на $(-\vec{n})$

Ако точка $M_0 \in \lambda \Rightarrow \delta_{M_0}^{g} > 0$
Ако точка $M_0 \in \overline{\lambda} \Rightarrow \delta_{M_0}^{g} < 0$ $\Big\} \Rightarrow$

λ - положителна по равнина
$\overline{\lambda}$ - отрицателна по равнина

От $g: x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ и от
$g: ax + by + c = 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} a &= p\cos\alpha \\ b &= p\sin\alpha \\ c &= -p \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = p^2 \Rightarrow p = \pm\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

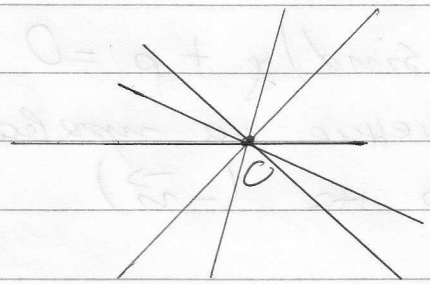
$$p = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Оттук уравненията приобиват вида

$$g: \frac{ax+by+c}{-\operatorname{sign} c\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \quad \Big| \quad g: \frac{ax+by+c}{\operatorname{sign} c\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

Сноп прави в равнината

т. C



Дефиниция

Множеството от всички прави в равнината минаващи през C се нарича сноп прави с център C

Означение – $S(C)$

Ако $\left.\begin{array}{l} g_1 : e_1(x\,y) = 0 \\ g_2 : e_2(x\,y) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} g_1 \neq g_2 \\ g_1 \cap g_2 = C \end{array}$

$S(C)$ може да се зададе тогава чрез

$$S(C) = S(g_1 g_2)$$

Т

Всяка права h с общо уравнение от вида $h : \lambda_1 e_1(x\,y) + \lambda_2 e_2(x\,y) = 0, (\lambda_1 \lambda_2) \neq (0,0)$ е права от $S(g_1 g_2)$

Ако всяка права от $S(g_1 g_2)$ има общо уравнение от вида $h : \lambda_1 e_1(x\,y) + \lambda_2 e_2(x\,y) = 0$ $(\lambda_1 \lambda_2) \neq (0,0)$

Доказателство (→)

Нека $h: \lambda_1 e_1(x,y) + \lambda_2 e_2(x,y) = 0 \; ; (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$

$$e_1(x,y) = a_1 x + b_1 y + c_1$$
$$e_2(x,y) = a_2 x + b_2 y + c_2$$

от условието следва $\Rightarrow$

$$\lambda_1 (a_1 x + b_1 y + c_1) + \lambda_2 (a_2 x + b_2 y + c_2) \Leftrightarrow$$

$$h: \underbrace{(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)}_{\text{полагаме } a} x + \underbrace{(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)}_{\text{полагаме } b} y + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0$$

Допускаме $(a,b) = (0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_1 + a_2 = 0 \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} b_1 + b_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

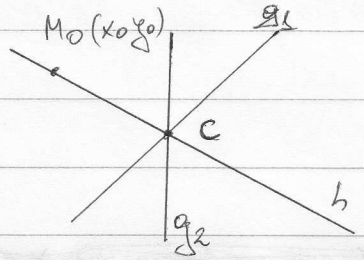
$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$ или $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow$ противоречие с условието за g_1 пресича g_2

Нека $C(x_0, y_0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e_1(x_0, y_0) = 0 \\ e_2(x_0, y_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\lambda_1 e_1(x_0, y_0) + \lambda_2 e_2(x_0, y_0) = 0$ т.е. $T. C \in h \Rightarrow h \in S(C)$

Доказателство на Т (⇐)

Нека $h \in S(c)$



Нека $M_0(x_0y_0) \neq c$
$M_0 \in h$

Нека вземем правата $\bar{h}$

$$e_2(\bar{x}_0\bar{y}_0)\,e_2(xy) - e_1(\bar{x}_0\bar{y}_0)\,e_2(xy) = 0$$

Ако допуснем че $e_2(\bar{x}_0\bar{y}_0), e_1(\bar{x}_0\bar{y}_0) = (0,0)$ то

$$\left.\begin{array}{l} e_2(\bar{x}_0\bar{y}_0) = 0 \Rightarrow M_0 \in g_2 \\ e_1(\bar{x}_0\bar{y}_0) = 0 \Rightarrow M_0 \in g_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{h} \text{ е права от сноп}$$

$\bar{h}$ с т. M_0 защото $e_2(\bar{x}_0\bar{y}_0)\,e_1(xy) - e_1(\bar{x}_0\bar{y}_0)\,e_2(xy) = 0$

$\Rightarrow \bar{h} \equiv h \Rightarrow h : e_2(\bar{x}_0\bar{y}_0)\,e_1(xy) - e_1(\bar{x}_0\bar{y}_0)\,e_2(xy) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = e_2(\bar{x}_0\bar{y}_0) \\ \lambda_2 = -e_1(\bar{x}_0\bar{y}_0) \\ (\lambda_1\lambda_2) \neq (0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow h : \lambda_1 e_1(xy) + \lambda_2 e_2(xy) = 0$$